УДК 550.831

И. В. Бойков, М. В. Кравченко

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЛАПЛАСОВЫХ ПОЛЕЙ

Аннотация. В работе рассматриваются оптимальные по порядку методы аппроксимации лапласовых векторных полей. Для этого исследована гладкость лапласовых векторных полей. Введены классы функций $\bar{B}_{\alpha,1}(\Omega,M)$, $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$, $M=\text{const}$. Вычислены поперечники Колмогорова и Бабенко для этих классов функций. Построены локальные сплайны и показано, что данные сплайны являются оптимальными по порядку методами аппроксимации лапласовых полей.

Ключевые слова: лапласовы векторные поля, эллиптические уравнения, сплайны, поперечники Колмогорова и Бабенко, прямые задачи гравиразведки.

Abstract. In the paper considered optimal with respect to accuracy methods for approximation Laplace vector fields. For this purpuse the smooth Laplace vector fields is investigated. Introduced the new functional class $\bar{B}_{\alpha,1}(\Omega,M)$, $\Omega=[-1,1]^l$, $l=1,2,\ldots$, $M=\text{const}$. Evaluated Kolmogorov widths and Babenko widths for this class of functions. Constructed local splines and shown that this splines are optimal with respect to accuracy methods for approximation Laplace fields.

Keywords: Laplase vector fields, elliptic equations, spline, Kolmogorov and Babenko widths, direct problems of gravity.

Введение

В монографии [1, с. 31] дано определение лапласова векторного поля. Там же отмечено, что лапласово векторное поле, определенное в области D, удовлетворяет в этой области векторному уравнению Лапласа $\Delta F=0$.

Если F – потенциальное в области D поле, удовлетворяющее уравнениям $\text{div}F=q$, $\text{rot}F=0$, $r\in D$, то справедливы формулы [1]

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{(n\cdot F)\text{grad}\frac{1}{|r-r'|}+[n\times F]\times\text{grad}\frac{1}{|r-r'|}\right\}ds+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_D \text{div}F\cdot\text{grad}\frac{1}{|r-r'|}d\vartheta=\begin{cases}F(r'), r'\in D,\\ 0, r'\notin D;\end{cases}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\left(n\cdot\text{grad}\frac{1}{|r-r'|}\right)F+\left[n\times\text{grad}\frac{1}{|r-r'|}\right]\times F\right\}ds+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_D \text{div}F\cdot\text{grad}\frac{1}{|r-r'|}d\vartheta=\begin{cases}F(r'), r'\in D,\\ 0, r'\notin D.\end{cases}$$

Для лапласова векторного поля справедливы формулы

$$F(r') = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{ (n \cdot F)\operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|} + [n \times F] \times \operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|} \right\} ds; \qquad (1)$$

$$F(r') = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{ \left(n \cdot \operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|} \right) F + \left[n \times \operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|} \right] \times F \right\} ds. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) дают решение векторного уравнения Лапласа $\Delta F = 0$ в области D, ограниченной поверхностью Ляпунова S. Поэтому представляет значительный интерес построение оптимальных методов аппроксимации векторной функции $F(r')$ в области D и построение оптимальных методов вычисления интегралов типа Коши.

Данная работа посвящена оптимальным методам аппроксимации потенциальных полей $F(r')$, представимых формулами (1) и (2). С этой целью исследована гладкость функции $F(r')$ в предположении, что $F(r)$ на поверхности S принадлежит классу функций Гельдера H_α, а S – поверхность Ляпунова. Будет показано, что $F(r') \in \overline{B}_{\alpha,0,\gamma}(D,M)$, $0 < \alpha \le 1$, $0 \le \gamma \le 1$, M – константа при $\gamma = 1$. Для класса функций $\overline{B}_{\alpha,0,1}(D,M)$ вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова и построены локальные сплайны, являющиеся наилучшим по порядку методом приближения функций из множества $\overline{B}_{\alpha,0,1}(D,M)$.

Напомним определения поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть B – банахово пространство, $X \subset B$ – компакт, $\Pi : X \to \overline{X}$ – представление компакта конечномерным пространством $\overline{X}$.

Определение 1. Пусть L^n – множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение

$$d_n(X,B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|,$$

где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет n-поперечник Колмогорова.

Определение 2. Пусть $X \in R^n$. Выражение

$$\delta_n(X) = \inf_{(\Pi : X \to R^n)} \sup_{x \in X} \operatorname{diam} \Pi^{-1}\Pi(x),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $\Pi : X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

Опишем классы функций, используемые в работе.

Определение 3. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \ldots$, $r = 1, 2, \ldots$, $0 < \gamma \le 1$. Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$ принадлежит классу функций $B_{r\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\|f(x)\|_{C(\Omega)} \le M;$$

$$\max_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial^{|v|}f(x)}{\partial x_1^{v_1}\ldots\partial x_l^{v_l}}\right| \le M^{|v|}|v|^{|v|},\ 1\le|v|\le r;$$

$$\left|\frac{\partial^{|v|}f(x)}{\partial x_1^{v_1}\ldots\partial x_l^{v_l}}\right| \le \frac{M^{|v|}|v|^{|v|}}{\left(d(x,\Gamma)\right)^{|v|-r-1+\gamma}},\ r<|v|<\infty,$$

здесь $x=(x_1,\ \ldots,\ x_l)$, $d(x,\Gamma)$ – расстояние от точки x до границы Γ области D, определяемое формулой $d(x,\Gamma)=\min\limits_{1\le i\le l}\ \min\left(|1+x_i|,|1-x_i|\right)$, $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3)$, $|\upsilon|=\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3$, υ_i – целые неотрицательные числа, $i=1,2,3$.

Определение 4. Пусть $D=[-1,1]^l$, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ 0<\alpha\le 1$, $0\le\gamma\le 1$. Множество $\bar{B}_{\alpha,0,\gamma}(\mathrm{D},M)$ состоит из функций $f(x_1,\ \ldots,\ x_l)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$|f(x_1,\ldots,x_l)|\le M,\ x\in D,$$

$$f(x)\in H_{\alpha\ldots\alpha}(M),\ 0<\alpha\le 1,\ x\in D,$$

$$\left|\frac{\partial^{|\upsilon|}f(x_1,\ldots,x_l)}{\partial x_1^{\upsilon_1}\ldots\partial x_l^{\upsilon_l}}\right| \le \frac{M^{|\upsilon|}|\upsilon|^{|\upsilon|}}{\left(d(x,\Gamma)\right)^{|\upsilon|-1+\gamma}}\left(1+\left|\ln\left(d(x,\Gamma)\right)\right|\right),\ |\upsilon|=1,2,\ldots$$

1 Гладкость лапласовых полей

Рассмотрим функцию

$$F(r')=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left\{(n\cdot F(r))\operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|}+[n\times F(r)]\times\operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|}\right\}ds, \qquad (3)$$

где $F=\operatorname{grad}U=\{f_1,f_2,f_3\}$; U – потенциальное поле; S – поверхность Ляпунова, ограничивающая область D; $n=\{n_1,n_2,n_3\}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S; $r=(x,y,z)$ – точка, пробегающая поверхность S; $r'=(x',y',z')$ – точка, лежащая внутри области D, $\operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|}=\{g_1,g_2,g_3\}$ – вектор-функция градиента.

Преобразуем выражение (3). Для этого, воспользовавшись формулой

$$[a\times b]\times c=b(a\cdot c)-a(b\cdot c),$$

получаем

$$\tilde{F}(r')=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left\{\left(n_1(r)f_1(r)+n_2(r)f_2(r)+n_3(r)f_3(r)\right)\operatorname{grad}\frac{1}{|r-r'|}+\right.$$

$$+F(r)\left(n_1(r)g_1(r)+n_2(r)g_2(r)+n_3(r)g_3(r)\right)-$$

$$-n(r)\left(f_1(r)g_1(r)+f_2(r)g_2(r)+f_3(r)g_3(r)\right)\}ds. \qquad (4)$$

Так как $F(r)$, $n(r)$, $\operatorname{grad}\dfrac{1}{|r-r'|}$ – вектор-функции, содержащие по три компоненты, то равенство (4) можно представить в скалярном виде тремя равенствами:

$$\tilde{f}_i(r')=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\{\left(n_1(r)f_1(r)+n_2(r)f_2(r)+n_3(r)f_3(r)\right)g_i(r,r')+$$

$$+f_i(r)\left(n_1(r)g_1(r)+n_2(r)g_2(r)+n_3(r)g_3(r)\right)-$$

$$-n_i(r)\left(f_1(r)g_1(r)+f_2(r)g_2(r)+f_3(r)g_3(r)\right)\}ds,\ i=1,2,3. \qquad (5)$$

Будем предполагать, что функции $f_i(x,y,z), i=1,2,3$ являются кусочно-постоянными. Из предположения гладкости поверхности S следует, что функции $n_i(x,y,z), i=1,2,3,$ определяющие проекции единичного нормального вектора в точке $(x,y,z)\in S$, удовлетворяют условию Гельдера с показателем α.

В этом случае поверхностные интегралы, входящие в равенства (5), распадаются на сумму поверхностных интегралов вида

$$\iint_S P_{ij}(r)g_1(r,r')ds,\ \iint_S P_{ij}(r)g_2(r,r')ds,\ \iint_S P_{ij}(r)g_3(r,r')ds, \qquad (6)$$

где функции $P_{ij}(r)$ – кусочно-непрерывные и имеют вид

$$P_{ij}(r)=n_i f_j,\ \ i,j=1,2,3.$$

Вследствие этого нам достаточно будет рассмотреть следующую функцию:

$$\varphi(r')=\iint_S P(r)g_1(r,r')ds, \qquad (7)$$

где $P(r)$ – кусочно-постоянная функция.

Остальные интегралы рассматриваются аналогично.

Оценим производные функции (7). Очевидно,

$$\frac{\partial^{\upsilon}\varphi(x',y',z')}{\partial x'^{\upsilon}}=\frac{\partial^{\upsilon}}{\partial x'^{\upsilon}}\iint_S P(x,y,z)g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})\,ds=$$

$$=\iint_S P(x,y,z)\frac{\partial^{\upsilon}}{\partial x'^{\upsilon}}\left[\frac{x'-x}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}\right]ds\,,\ \upsilon\ge 1. \qquad (8)$$

Введем следующее обозначение: $\tau=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$. Тогда

$$\frac{\partial^{\upsilon} g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})}{\partial x'^{\upsilon}} = (2\upsilon+1)!!\times$$

$$\times\begin{cases} \left(\dfrac{A_1(x'-x)^{\upsilon+1}}{\tau^{\upsilon+3/2}} + \dfrac{A_2(x'-x)^{\upsilon-1}}{\tau^{\upsilon-1+3/2}} + \dfrac{A_3(x'-x)^{\upsilon-3}}{\tau^{\upsilon-2+3/2}} + \ldots + \dfrac{A_N(x'-x)}{\tau^{(\upsilon+3)/2}}\right), \upsilon - \text{четное}, \\ \left(\dfrac{A_1^*(x'-x)^{\upsilon+1}}{\tau^{\upsilon+3/2}} + \dfrac{A_2^*(x'-x)^{\upsilon-1}}{\tau^{\upsilon-1+3/2}} + \dfrac{A_3^*(x'-x)^{\upsilon-3}}{\tau^{\upsilon-2+3/2}} + \ldots + \dfrac{A_N^*(x'-x)^0}{\tau^{(\upsilon+2)/2}}\right), \upsilon - \text{нечетное}, \end{cases}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_N; A_1^*, A_2^*, \ldots, A_N^* = \text{const}$, $\upsilon \geq 1$.

Последнее равенство можно представить в виде

$$\frac{\partial^{\upsilon} g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})}{\partial x'^{\upsilon}} = (2\upsilon+1)!!\sum_{i=0}^{N} \frac{A_i(x'-x)^{\upsilon-2i+1}}{\tau^{\upsilon-i+3/2}},\ \upsilon \geq 1,$$

$N = \dfrac{\upsilon+1}{2}$ – при υ нечетном, $N = \dfrac{\upsilon}{2}$ – при υ четном.

Тогда равенство (8) представимо в виде

$$\left|\frac{\partial^{\upsilon}\varphi(x',y',z')}{\partial x'^{\upsilon}}\right| = \left|\iint_S P(x,y,z)\frac{\partial^{\upsilon}}{\partial x'^{\upsilon}}\left[g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})\right] ds\right| \leq$$

$$\leq (2\upsilon+1)!!\left(\sum_{i=0}^{N}\left|\iint_S \frac{P(x,y,z)A_i(x'-x)^{\upsilon-2i+1}}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\upsilon-i+3/2}} ds\right|\right). \qquad (9)$$

В формуле (9) рассмотрим последнее слагаемое при υ нечетном, $i = N = \dfrac{\upsilon+1}{2}$,

$$\left|\iint_S \frac{P(x,y,z)A_N^*}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{(\upsilon+2)/2}} ds\right| \leq \frac{\left|A_N^*\right|}{\left(d((x',y',z'),\Gamma)\right)^{\upsilon}}\times$$

$$\times\left|\iint_S \frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right|.$$

Оценим отдельно интеграл

$$\iint_S \frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, \qquad (10)$$

учитывая, что для функции $P(x,y,z)$ справедливо неравенство

$$\left|P(x,y,z)\right| \le \tilde{M}\,,\ \tilde{M} = \text{const}\,.$$

Пусть S – прямоугольник $[a,b;c,d]$, лежащий в плоскости XOY. Положим $y'=0, x'=0, a=-b, c=-d$. Тогда расстояние от точки (x',y',z') до S равно z'. Используя известные табличные интегралы

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\,,\ \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right| + C$$

и учитывая, что функция $f(x)=\operatorname{arctg}(x)$ является нечетной и для нее справедливо неравенство $\left|\operatorname{arctg}(x)\right| \le \frac{\pi}{2}$, получим

$$\left|\iint\limits_S \frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right| \le \tilde{M}\left|\int\limits_a^b\int\limits_c^d \frac{dydx}{(x-x')^2+(y-y')^2+z'^2}\right| =$$

$$= \tilde{M}\left|\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-d}^{d} \frac{dydx}{\left(x^2+y^2+z'^2\right)}\right| =$$

$$= \tilde{M}\left|\int\limits_{-b}^{b}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+z'^2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{d}{\sqrt{x^2+z'^2}} - \operatorname{arctg}\frac{-d}{\sqrt{x^2+z'^2}}\right]\right)dx\right| =$$

$$= 2\tilde{M}\left|\int\limits_{-b}^{b}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+z'^2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{d}{\sqrt{x^2+z'^2}}\right]\right)dx\right| \le \tilde{M}\pi\int\limits_{-b}^{b}\frac{1}{\sqrt{x^2+z'^2}}\,dx =$$

$$= \tilde{M}\pi\ln\left|x+\sqrt{x^2+z'^2}\right|\Bigg\|_{-b}^{b} \le B\left(1+\left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right). \qquad (11)$$

Здесь и всюду ниже через B обозначаются константы, конкретные значения которых не вычисляются.

Оценим теперь интеграл (10) в случае, когда поверхность S выпуклая. Пусть точка (x^*,y^*,z^*) реализует расстояние от точки (x',y',z') до поверхности S, равное h. Построим сферу $S((x',y',z'),\ 2h)$ радиуса $2h$ с центром в точке (x',y',z') (естественно рассматривается случай достаточно малых значений h). Тогда поверхность S разбивается на две части: поверхность S_1, расположенную внутри сферы $S((x',y',z'),\ 2h)$, и на поверхность S_2, расположенную вне этой сферы.

Оценим в отдельности интегралы

$$\iint\limits_{S_i} \frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},\ \ i=1,2.$$

Так как по предположению функция $P(x,y,z)$ кусочно-непрерывная, то существует $\tilde{M} = \sup\limits_{S}|P(x,y,z)|$.

Проведем через точку (x^*, y^*, z^*) плоскость, касательную к поверхности S_1, и спроектируем на касательную плоскость поверхность S_1, проекцию обозначим через S_1^*. Так как значение h достаточно, то имеется взаимнооднозначное соответствие между поверхностями S_1 и S_1^*. Обозначим через σ_1 и σ_2 площади поверхностей S_1 и S_1^*.Тогда

$$\left|\iint\limits_{S_1}\frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right| \le$$

$$\le \tilde{M}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\iint\limits_{S_1^*}\frac{ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \le B(1+|\ln h|).$$

Оценим теперь интеграл

$$\iint\limits_{S_2}\frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Покажем, что этот интеграл также ограничен величиной $B(1+|\ln h|)$. Для этого воспользуемся плоскостью, касательной к поверхности S в точке (x^*, y^*, z^*) (плоскость n_1). Построим цилиндрическую поверхность, перпендикулярную к этой плоскости, в которую вписана область D. Пусть l – кривая касания поверхности S с цилиндром. Так как область D выпуклая, то такая кривая существует. Обозначим через S_H часть поверхности, расположенную под кривой l. Отметим, что S_H не зависит от h. Обозначим через H расстояние от точки (x', y', z') до кривой l. Это расстояние также не зависит от h. Спроектируем поверхность $S_H \setminus S_1$ на плоскость, проходящую через точку (x', y', z') и параллельную касательной плоскости к поверхности S в точке (x^*, y^*, z^*) (плоскость n_2). Обозначим проекцию через G_H^*. Тогда

$$\left|\iint\limits_{S_2}\frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right| \le \tilde{M}\iint\limits_{S_2}\frac{ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} =$$

$$= \tilde{M}\iint\limits_{S_2\setminus S_H}\frac{ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} + \tilde{M}\iint\limits_{S_H\setminus S_1}\frac{ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \le$$

$$\le \frac{\tilde{M}}{H^2}\iint\limits_{S_2\setminus S_H} ds + \tilde{M}\gamma\iint\limits_{G_H^*}\frac{dxdy}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Здесь γ определяется углом наклона нормали к поверхности $S_H \setminus S_1$ и нормалью к касательной плоскости n_2. В качестве γ выбирается наибольший коэффициент, равный 1.

Оценим последний интеграл. Пусть ρ_0 – радиус наибольшего круга с центром в точке (x',y',z'), вписанного в область G_H^*. Очевидно, $\rho_0 = Bh$. Пусть R_0 – радиус наименьшего круга с центром в точке (x',y',z'), описанного вокруг области G_H^*. Очевидно, $R_0 = BH$.

Тогда

$$\iint\limits_{G_H^*} \frac{dxdy}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} = \iint\limits_{G_H^*} \frac{dxdy}{(x-x')^2+(y-y')^2} \le$$

$$\le \iint\limits_{B((x',y',z'),R_0)\setminus B((x',y',z'),\rho_0)} \frac{dxdy}{(x-x')^2+(y-y')^2} \le \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\rho_0}^{R_0} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = B(\ln R_0 - \ln \rho_0) =$$

$$= B\left|\ln R_0 - \ln \rho_0\right| \le B(\left|\ln R_0\right| + \left|\ln \rho_0\right|) \le B(1+\left|\ln h\right|).$$

В результате получим

$$\left|\iint\limits_{S_2} \frac{P(x,y,z)ds}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right| \le B(1+\left|\ln h\right|).$$

Таким образом, получена оценка для интеграла (10), и в случае, когда поверхность S выпуклая, эта оценка совпадает с (11).

Тогда

$$\left|\iint\limits_{S} \frac{P(x,y,z)A_N^*}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{(\upsilon+2)/2}} ds\right| \le$$

$$\le \frac{\left|A_N^*\right| B}{d((x',y',z'),\Gamma)^{\upsilon}}\left(1+\left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right) \le$$

$$\le \frac{B}{d((x',y',z'),\Gamma)^{\upsilon}}\left(1+\left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right). \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{S} \frac{P(x,y,z)(x'-x)^k}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+2+k}{2}}}, \tag{13}$$

который представляет собой общий вид интегралов, входящих в (9), при любом υ (четном и нечетном), $k = \upsilon + 1 - 2i$, $i = 0, 1, ..., N$. Для получения необходимой нам оценки используем формулу (12):

$$\left| \iint_S \frac{P(x,y,z)(x'-x)^k\, ds}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+2+k}{2}}} \right| \le$$

$$\le \iint_S \frac{|P(x,y,z)|\left|(x'-x)^k\right|}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+2+k}{2}}} ds =$$

$$= \iint_S \frac{|P(x,y,z)|\left((x'-x)^2\right)^{k/2} ds}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+2+k}{2}}} \le$$

$$\le \iint_S \frac{|P(x,y,z)|\left((x'-x)^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{k/2} ds}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+2+k}{2}}} =$$

$$= \iint_S \frac{|P(x,y,z)|\, ds}{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+2}{2}}} \le$$

$$\le \frac{B}{d((x',y',z'),\Gamma)^{\upsilon}} \left(1 + \left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right).$$

Число слагаемых в $\dfrac{\partial^{\upsilon} g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})}{\partial x'^{\upsilon}}$ будет составлять $\upsilon/2+1$ в случае, когда υ четное, и $(\upsilon+1)/2+1$ в случае, когда υ нечетное.

Но так как при любом υ число слагаемых не будет превышать 2υ, то получим

$$\left| \frac{\partial^{\upsilon} \varphi(x',y',z')}{\partial x'^{\upsilon}} \right| \le \frac{B\upsilon(2\upsilon+1)!!}{d((x',y',z'),\Gamma)^{\upsilon}} \left(1 + \left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right),\ \upsilon = 1, 2, ... \quad (14)$$

В связи с несимметричностью функции $\varphi(x',y',z')$ относительно переменных x', y' и z' оценим частные производные функции по переменной y':

$$\frac{\partial^{\upsilon} g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})}{\partial y'^{\upsilon}} = (2\upsilon+1)!!(x'-x)\times$$

$$\times\begin{cases}\left(\dfrac{A_1(y-y')^{\upsilon}}{\tau^{\upsilon+3/2}}+\dfrac{A_2(y-y')^{\upsilon-2}}{\tau^{\upsilon+3/2-1}}+\dfrac{A_3(y-y')^{\upsilon-4}}{\tau^{\upsilon+3/2-2}}+...+\dfrac{A_N(y-y')^{0}}{\tau^{(\upsilon+3)/2}}\right), \upsilon-\text{четное},\\ \left(\dfrac{A_N^*(y-y')^{\upsilon}}{\tau^{\upsilon+3/2}}+\dfrac{A_2^*(y-y')^{\upsilon-2}}{\tau^{\upsilon+3/2-1}}+\dfrac{A_3^*(y-y')^{\upsilon-4}}{\tau^{\upsilon+3/2-2}}+...+\dfrac{A_N^*(y-y')}{\tau^{(\upsilon+4)/2}}\right), \upsilon-\text{нечетное},\end{cases}$$

где $A_1, A_2, ..., A_N, A_1^*, A_2^*, ..., A_N^* = \mathrm{const}$; $N=\dfrac{\upsilon-1}{2}$ при υ нечетном, $N=\dfrac{\upsilon}{2}$ при υ четном.

Последнее равенство можно представить в виде

$$\frac{\partial^{\upsilon} g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})}{\partial y'^{\upsilon}}=(2\upsilon+1)!!(x'-x)\sum_{i=0}^{N}\frac{A_i(y-y')^{\upsilon-2i}}{\tau^{\upsilon+3/2-i}},$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial^{\upsilon}\varphi(x',y',z')}{\partial y'^{\upsilon}}\right|=\left|\iint_S P(x,y,z)\frac{\partial^{\upsilon}}{\partial y'^{\upsilon}}\left[g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})\right]ds\right|\le$$

$$\le(2\upsilon+1)!!\left(\sum_{i=0}^{N}\left|\iint_S\frac{P(x,y,z)A_i(y-y')^{\upsilon-2i}(x'-x)}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{3/2+\upsilon-i}}ds\right|\right). \qquad (15)$$

Рассмотрим интеграл

$$\iint_S\frac{P(x,y,z)(x'-x)(y-y')^k}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+3+k}{2}}}, \qquad (16)$$

который представляет собой общий вид интегралов, входящих в (15), при любом υ (четном и нечетном), $k=\upsilon-2i, i=0...N$. Для получения необходимой нам оценки используем формулу (12):

$$\left|\iint_S\frac{P(x,y,z)(x'-x)(y-y')^k}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+3+k}{2}}}\right|\le$$

$$\le\iint_S\frac{|P(x,y,z)||(x'-x)||(y-y')^k|}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+3+k}{2}}}ds=$$

$$=\iint\limits_S \frac{|P(x,y,z)|\left((x'-x)^2\right)^{1/2}\left((y-y')^2\right)^{k/2} ds}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+3+k}{2}}} \le$$

$$\le\iint\limits_S \frac{|P(x,y,z)|\left((x'-x)^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{1}{2}}\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{k}{2}} ds}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+3+k}{2}}} =$$

$$=\iint\limits_S \frac{|P(x,y,z)|\,ds}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{\frac{\upsilon+2}{2}}} \le$$

$$\le \frac{B}{d((x',y',z'),\Gamma)^{\upsilon}}\Big(1+\Big|\ln\Big(d\big((x',y',z'),\Gamma\big)\Big)\Big|\Big).$$

Число слагаемых в $\dfrac{\partial^{\upsilon} g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})}{\partial y'^{\upsilon}}$ будет составлять $\upsilon/2+1$ в случае, когда υ четное, и $(\upsilon-1)/2+1$ в случае, когда υ нечетное.

Но так как при любом υ число слагаемых не будет превышать υ, то получим

$$\left|\frac{\partial^{\upsilon}\varphi(x',y',z')}{\partial y'^{\upsilon}}\right| \le \frac{B\upsilon(2\upsilon+1)!!}{d((x',y',z'),\Gamma)^{\upsilon}}\Big(1+\Big|\ln\Big(d\big((x',y',z'),\Gamma\big)\Big)\Big|\Big),\ \upsilon=1,2,\ldots \quad (17)$$

Аналогичным образом вычисляется и оценивается частная производная

$$\left|\frac{\partial^{\upsilon}\varphi(x',y',z')}{\partial z'^{\upsilon}}\right| \le \frac{B\upsilon(2\upsilon+1)!!}{d((x',y',z'),\Gamma)^{\upsilon}}\Big(1+\Big|\ln\Big(d\big((x',y',z'),\Gamma\big)\Big)\Big|\Big),\ \upsilon=1,2,\ldots \quad (18)$$

Рассмотрим смешанную производную:

$$\left|\frac{\partial^2\varphi(x',y',z')}{\partial x'\partial y'}\right| = \left|\iint\limits_S P(x,y,z)\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}\left[g_1(\{x,y,z\},\{x',y',z'\})\right] ds\right| \le$$

$$\le 3\iint\limits_S \frac{|P(x,y,z)||y-y'|}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{5/2}} ds +$$

$$+15\iint\limits_S \frac{|P(x,y,z)||y-y'|(x'-x)^2}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{7/2}} ds \le$$

$$\le 3\iint\limits_S \frac{|P(x,y,z)||y-y'|}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{5/2}} ds +$$

$$+15\iint_S \frac{|P(x,y,z)||y-y'|\left((x'-x)^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{7/2}}ds \le$$

$$\le 3\iint_S \frac{|P(x,y,z)||y-y'|}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{5/2}}ds +$$

$$+15\iint_S \frac{|P(x,y,z)||y-y'|}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{5/2}}ds =$$

$$=18\iint_S \frac{|P(x,y,z)||y-y'|}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{5/2}}ds \le$$

$$\le \frac{18}{(d((x',y',z'),\Gamma))^2}\cdot\iint_S \frac{|P(x,y,z)|\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{1/2}}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}ds \le$$

$$\le \frac{18}{(d((x',y',z'),\Gamma))^2}\cdot\iint_S \frac{|P(x,y,z)|}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}ds \le \frac{18B}{(d((x',y',z'),\Gamma))^2}\times$$

$$\times\left(1+\left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right) \le \frac{2\cdot 5!!B}{(d((x',y',z'),\Gamma))^2}\left(1+\left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right).$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\left|\frac{\partial^{|\upsilon|}\varphi(x',y',z')}{\partial x'^{\upsilon_1}\partial y'^{\upsilon_2}\partial z'^{\upsilon_3}}\right| \le \frac{B|\upsilon|\left(2|\upsilon|+1\right)!!}{d((x',y',z'),\Gamma)^{|\upsilon|}}\left(1+\left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right),\ |\upsilon|=1,2,\ldots \quad (19)$$

Заметим, что при $d\left((x',y',z'),\Gamma\right)>1$ указанную оценку можно уточнить.

Оценим интеграл

$$\left|\iint_S \frac{P(x,y,z)A_N^*}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{(\upsilon+2)/2}}ds\right| \le \frac{\left|A_N^*\right|B}{d((x',y',z'),\Gamma)^{(\upsilon+2)/2}}\iint_S ds \le$$

$$\le \frac{B}{d((x',y',z'),\Gamma)^{(\upsilon+2)/2}}.$$

Аналогичным образом рассматривая общие виды интегралов, входящих в (9) и (15), получим следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial^{|\upsilon|}\varphi(x',y',z')}{\partial x'^{\upsilon_1}\partial y'^{\upsilon_2}\partial z'^{\upsilon_3}}\right| \le \frac{B|\upsilon|\left(2|\upsilon|+1\right)!!}{\left(d((x',y',z'),\Gamma)\right)^{(|\upsilon|+2)/2}},\ d\left((x',y',z'),\Gamma\right) > 1,\ |\upsilon| = 1, 2, \ldots \quad (20)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции* $f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)$ *являются кусочно-постоянными. Тогда вектор-функция*

$$\tilde{F}(x',y',z') = \left\{\tilde{f}_1(x',y',z'), \tilde{f}_2(x',y',z'), \tilde{f}_3(x',y',z')\right\},$$

определяемая равенством (3), *имеет счетное множество частных производных, для которых выполняются неравенства*

$$\left|\frac{\partial^{|\upsilon|}\tilde{f}_i(x',y',z')}{\partial x'^{\upsilon_1}\partial y'^{\upsilon_2}\partial z'^{\upsilon_3}}\right| \le$$

$$\le \begin{cases} M,\ \upsilon = 0, \\ \dfrac{M|\upsilon|(2|\upsilon|+1)!!\left(1+\left|\ln\left(d\left((x',y',z'),\Gamma\right)\right)\right|\right)}{\left[d((x',y',z'),\Gamma)\right]^{|\upsilon|}},\ d((x',y',z'),\Gamma) \le 1, |\upsilon| \ge 1, \\ \dfrac{M|\upsilon|(2|\upsilon|+1)!!}{\left[d((x',y',z'),\Gamma)\right]^{(\upsilon+2)/2}},\ d((x',y',z'),\Gamma) > 1, |\upsilon| \ge 1, \end{cases} \quad (21)$$

где $i = 1, 2, 3$, $d\left((x',y',z'),\Gamma\right)$ – расстояние точки (x',y',z') до границы Γ области D, $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$, $|\upsilon| = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3$, $M = \text{const}$.

При построении оптимальных методов аппроксимации лапласовых полей понадобится следующее утверждение, справедливость которого следует из теоремы А. М. Ляпунова о производных потенциала простого слоя [2, с. 86].

Теорема 2. *Пусть функции* $f_i(x,y,z)$, $n_i(x,y,z)$, $i = 1, 2, 3$, $(x,y,z) \in S$ *удовлетворяют условию Гельдера с показателем* α ($0 < \alpha \le 1$) *по каждой переменной* x, y, z. *Тогда функции* $\tilde{f}_i(x',y',z'), (x',y',z') \in D, i = 1, 2, 3$ *принадлежат классу функций Гельдера с показателем* α ($0 < \alpha \le 1$).

2 Оптимальные по точности методы аппроксимации функций из множества $\bar{B}_{\alpha,0,1}(\Omega, M), \Omega = [-1,1]^l$

Вначале построим оптимальный метод аппроксимации функций из множества $\bar{B}_{\alpha,0,1}(\Omega, M)$ в предположении, что $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2, 3, \ldots$, а затем укажем на способ распространения этого алгоритма на трехмерные области D, ограниченные гладкими поверхностями S.

Для построения оптимального метода аппроксимации функций из класса $\bar{B}_{\alpha,0,1}(\Omega, M)$ вычислим значения поперечников Бабенко и Колмогорова для этого класса и построим локальные сплайны, точность которых совпадает с величиной поперечников.

Обозначим через Δ^0 множество точек t $(t=(t_1,\ ...,\ t_l))$, расстояние от которых до границы $\Gamma=\partial\Omega$ области Ω удовлетворяет неравенству $0\le d(t,\Gamma)\le\frac{1}{2^N}$. Через Δ^k, $k=1,\ 2,\ ...,\ N$ обозначим множество точек $t\in\Omega$, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенству

$$\frac{2^{k-1}}{2^N}\le d(t,\Gamma)\le\frac{2^k}{2^N},\ k=1,2,...,N.$$

Каждую из областей Δ^k, $k=0,1,...,N-1$ покроем более мелкими кубами $\Delta^k_{i_1,...,i_l}$ с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, равными

$$h_0=\frac{1}{2^N},\ h_k=\frac{2^k-2^{k-1}}{2^N},\ k=1,2,...,N.$$

То обстоятельство, что среди кубов $\Delta^k_{i_1,...,i_l}$ могут при каждом k встретиться параллелепипеды, у которых длина одного или нескольких ребер меньше или равна h_k, не влияет на общность рассуждений.

Ниже мы построим два вида локальных сплайнов. Сначала построим локальный сплайн, который может иметь разрывы на гранях кубов $\Delta^k_{i_1,...,i_l}$. Этот сплайн более удобен при реализации и имеет такую же точность, что и непрерывный сплайн.

Необходимость в построении непрерывного сплайна вызвана двумя обстоятельствами: во-первых, во многих задачах гравиразведки проводится тренд по всей области; во-вторых, для вычисления поперечника Колмогорова необходима аппроксимация непрерывными множествами.

Вначале остановимся на построении необязательно непрерывного сплайна.

При построении необязательно непрерывного локального сплайна, предназначенного для аппроксимации функций из множества $\overline{B}_{\alpha,0,1}(\Omega,M)$, достаточно ограничиться описанным выше покрытием области Ω кубами $\Delta^k_{i_1,...,i_l}$, $k=0,1,...,N-1$.

Обозначим через $L_{s_k,...,s_k}(f,\ \Delta^k_{i_1,...,i_l})$ интерполяционный полином Лагранжа по l переменным, использующий при своем построении s_k узлов полинома Чебышева первого рода по каждой переменной. Здесь $s_0=\left[\sqrt{M}\right]+1,\ s_k=\left[MN\left((N-k)\ln^l N\right)^{1/N}\right]+1,\ k=1,2,...,N.$

Сплайн, составленный из полиномов $L_{s_k,\dots,s_k}(f,\ \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$, $k=0,\ 1,\ \dots,\ N$, обозначим через $f_{LN}(t)$. Можно показать, что, как и в случае построенного ниже непрерывного сплайна $f_N(t)$,

$$\left\| f(t) - f_{LN}(t) \right\| \le \frac{B}{2^{N\alpha}}.$$

При построении непрерывного локального сплайна, аппроксимирующего $f(t) \in \overline{B}_{\alpha,0,1}(\Omega, M)$, нужно произвести покрытие области Ω следующим образом. В области Δ^N размещается куб Δ^N. В области Δ^{N-1} размещаются кубы $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$, грани которых параллельны координатным плоскостям, а длины ребер равны h_k. При этом вершины куба Δ^N входят в множества вершин кубов $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$. После покрытия области Δ^{N-1} кубами $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$ проводится покрытие области Δ^{N-2} кубами $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$. При этом в число вершин кубов $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$ входят вершины кубов $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$, лежащие на гранях, общих с Δ^{N-2}. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все области Δ_k, $k = N-1, N-2, \dots, 1, 0$ не окажутся покрытыми кубами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. То обстоятельство, что при этом при каждом значении k в каждой области Δ^k может оказаться конечное число параллелепипедов с гранями, параллельными координатным осям, у которых длина одного или нескольких ребер меньше h_k, не влияет на общность рассуждений.

Построим интерполяционные полиномы таким образом, чтобы в число узлов интерполяции входили концы сегментов.

Полином $P_s(f,\ [a,b])$, интерполирующий функцию $f(t) \in \overline{B}_{\alpha,0,1}(\Omega, M)$ на сегменте $[a,b]$, строится следующим образом.

Обозначим через ξ_k, $k = 1, 2, \dots, s$ узлы полинома Чебышева первого рода степени s. Отобразим сегмент $[\xi_1, \xi_s] \subset [-1,1]$ на сегмент $[a,b]$ таким образом, чтобы точки ξ_1 и ξ_s перешли в точки a и b соответственно. Образы точек $\xi_1, \dots, \xi_s$ на сегменте $[a,b]$ обозначим через $\xi_1', \dots, \xi_s'$. Интерполяционный полином, построенный по узлам $\xi_1', \dots, \xi_s'$, обозначим через $P_s(f,[a,b])$.

Через $P_{s,\dots,s}(f,[a_1,b_1;\dots;a_l,b_l])$ обозначим интерполяционный полином, который определяется формулой

$$P_{s,\dots,s}(f,[a_1,b_1;\dots;a_l,b_l]) = P_s^{t_1}\left[\dots\left[P_s^{t_{l-1}}\left[P_s^{t_l}\left[f,[a_l,b_l]\right],[a_{l-1},b_{l-1}]\right],\dots\right],[a_1,b_1]\right],$$

где полином $P_s(f,\ [a,b])$ определен выше, а верхний индекс в выражении $P_s^{t_i}(f,\ [a_i,b_i])$ определяет переменную, по которой проводится интерполяция.

Непрерывный локальный сплайн строится следующим образом. В кубе Δ^N функция $f(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^N)$. В каждом из кубов $\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l})$, который во всех узлах интерполяции, за исключением расположенных на гранях куба Δ^N, принимает значения $P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^N)$. Построив интерполяционные полиномы $P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l})$, аналогичным образом строим интерполяционные полиномы $P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^{k}_{i_1,\ldots,i_l})$, $k=N-2, N-3,\ldots,1,0$. Сплайн, составленный из полиномов $P_{s,\ldots,s}(f,\Delta^{k}_{i_1,\ldots,i_l})$, $k=0,1,\ldots,N$, обозначим через $f_N(t)$.

Оценим погрешность аппроксимации. Положим $s=\left[2\sigma(N)MN\right]+1$, где $\sigma(N)=\left(\ln^l N\right)^{1/N}$. Очевидно,

$$\left\|f(t)-f_N(t)\right\|_{C(\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})}\le B\frac{h_0^\alpha\lambda_s}{s^\alpha}\le B\left(\frac{1}{2^N}\right)^\alpha\frac{M}{s^\alpha}\le B\frac{1}{2^{\alpha N}}, \tag{22}$$

где λ_s – константа Лебега.

При $k=1,2,\ldots,N$ получим

$$\left\|f(t)-f_N(t)\right\|_{C(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})}\le B\frac{M^N N^N h_k^N}{s^N}\left(\frac{2^N}{2^k}\right)^N\left(1+\left|\ln\frac{2^k}{2^N}\right|\right)\lambda_s^l\le$$

$$\le B\frac{M^N N^N}{s^N}\left(\frac{2^{k+1}-2^k}{2^N}\right)^N\left(\frac{2^N}{2^k}\right)^N(N-k)\left(\ln N\right)^l\le$$

$$B\frac{M^N N^N}{N^N M^N\left(\ln N\right)^l}(N-k)\left(\ln N\right)^l\le\frac{B}{2^{\alpha N}}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что

$$\left\|f(t)-f_N(t)\right\|\le\frac{B}{2^{\alpha N}}. \tag{24}$$

Оценим число узлов, используемых при построении локального сплайна $f_N(t)$. Прежде всего оценим число m кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Очевидно

$$m\asymp\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{2-2\cdot2^{k-N}}{2^{k+1-N}-2^{k-N}}\right)^{l-1}\asymp\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{2\cdot2^N-2\cdot2^k}{2^k(2-1)}\right)^{l-1}\asymp$$

$$\asymp 2^{N(l-1)}\sum_{k=0}^{N-1}2^{-k(l-1)}-N \asymp 2^{N(l-1)}.$$

Так как в каждом кубе используется s^l узлов сплайна $f_N(t)$, то

$$n \asymp 2^{N(l-1)}s^l \asymp 2^{N(l-1)}2^{\alpha l} N^{l/N} N^l (\ln^l N)^{l/N} \asymp N^l 2^{N(l-1)},$$

и, следовательно,

$$N \asymp \log_2 n^{1/(l-1)} - \log_2 \log_2^{l/(l-1)} n. \tag{25}$$

Из (24) и (25) имеем

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Omega)} \le \frac{B}{n^{\alpha/(l-1)}}. \tag{26}$$

При $\alpha = 1$ оценка (26) имеет вид

$$\|f(t)-f_N(t)\|_{C(\Omega)} \le \frac{B}{n^{1/(l-1)}}. \tag{27}$$

Заметим, что класс функций $B_{1,1}(\Omega,M)$ вложен в класс функций $\bar{B}_{1,0,1}(\Omega,M)$. Для класса функций $B_{1,1}(\Omega,M)$ в [3] известна оценка снизу поперечников Бабенко

$$\delta_n(B_{1,1}(\Omega,M)) \ge Bn^{-1/(l-1)}.$$

Следовательно,

$$\delta_n(\bar{B}_{1,0,1}(\Omega,M)) \ge Bn^{-1/(l-1)}. \tag{28}$$

Из (27), (28) и известного [4] соотношения $\delta_n(X) \le 2d_n(X,C)$ приходим к равенству

$$\delta_n(\bar{B}_{1,0,1}(\Omega,M)) \asymp d_n(\bar{B}_{1,0,1}(\Omega,M),C) \asymp n^{-1/(l-1)}.$$

Таким образом, описанный выше метод оптимален по порядку при $\alpha = 1$.

Замечание 1. *Можно показать, что метод оптимален по порядку при* $0 < \alpha \le 1$.

Замечание 2. *При использовании равномерной сетки имеем погрешность порядка* $n^{-\alpha/l}$.

Опишем способ построения локального сплайна в областях, ограниченных поверхностями Ляпунова. Для определенности рассмотрим выпуклую область, ограниченную гладкой поверхностью S. Обозначим через R радиус наибольшей сферы, которую можно вписать в поверхность S. Пусть (x_0, y_0, z_0) – центр этой сферы. Обозначим через N натуральное число. Заключим тело D в параллелепипед G. Покроем параллелепипед G кубами с ребрами, равными $\frac{R}{2}$. Назовем N-отмеченными те кубы, расстояние от которых до границы S области D удовлетворяет неравенствам $\frac{R}{2} \le d(t,S) \le R$. Обозначим эти кубы через Δ_i^N. Объединение этих кубов составляет первый этап замощения. Покроем параллелепипед G кубами с ребрами, равными $\frac{1}{4}R$. Назовем $(N-1)$-отмеченными те кубы, которые не входят в первый этап замощения и расстояние от которых до границы S удовлетворяет неравенствам $\frac{R}{4} \le d(t,S) \le \frac{R}{2}$. Аналогичным образом область D покрываем кубами с ребрами, равными $\frac{R}{8}, ..., \frac{R}{2^N}$. Кубы, которые вошли в покрытие, назовем $(N-2, N-3, ..., 0)$-покрытиями области D. Область, являющуюся объединением $(0, 1, ..., N)$-отмеченных кубов, обозначим через D^*. В каждом из отмеченных кубов $\Delta_i^k, k = 0, 1, ..., N$ функцию $f(t)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом $P_{s,...,s}(f, \Delta_i^k)$.

Замечание 3. *При построении интерполяционных полиномов $P_{s,...,s}(f, \Delta_i^k)$ в узлах, расположенных вне области D, значения функции $f(t)$ полагаются равными ее значениям в ближайших узлах, расположенных в области D. Если таких узлов несколько, то выбирается или значение в одном из них, или среднее значение.*

Сплайн, составленный из полиномов $P_{s,...,s}(f, \Delta_i^k)$, $k = 0, 1, ..., N$, обозначим через $f_N(t)$. Очевидно, этот сплайн не является непрерывным. Его погрешность на классе функций $\overline{B}_{\alpha,0,1}(D,M)$ равна $\frac{B}{2^{N\alpha}}$.

Список литературы

1. **Жданов, М. С.** Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей / М. С. Жданов. – М. : Наука, 1984. – 328 с.
2. **Гюнтер, Н. М.** Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н. М. Гюнтер. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 416 с.
3. **Бойков, И. В.** Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2007. – 234 с.
4. **Бабенко, К. И.** Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / К. И. Бабенко. – М. : Наука, 1979. – 196 с.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук,
профессор,
заведующий кафедрой высшей
и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет

Boykov Ilya Vladimirovich
Doctor of Science (in Mathematics),
professor, head of sub-department
of highest and applied mathematics,
Penza State University

Кравченко Марина Витальевна
студент,
Пензенский государственный
университет

Kravchenko Marina Vitalyevna
graduate student,
Penza State University

УДК 550.831

Бойков, И. В.

Оптимальные методы восстановления лапласовых полей / И. В. Бойков, М. В. Кравченко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 25–43.